

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Проректор по учебной работе и  
довузовской подготовке**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Уравнения математической физики
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Системная и синтетическая биология Физтех-школа Биологической и Медицинской Физики кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 45 час.

семинары: 45 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 105 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составили:

В.И. Зубов, д-р физ.-мат. наук, профессор

Т.В. Михайлова, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

## Аннотация

В курсе рассматриваются ключевые понятия и методы дисциплины «Уравнения математической физики». Основной целью является формирование базовых знаний, умений и навыков использования стандартного математического аппарата, предназначенного для описания физических процессов, зависящих от двух и более числа переменных. Прежде всего вводится основное для курса определение линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка и определяется понятие решения. Определяются типы уравнений (эллиптические, гиперболические и параболические, ультрагиперболические). Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности. А также задача Коши для волнового уравнения в случае одной, двух и трех пространственных переменных. Исследуется распространение волн в случае трех и двух пространственных переменных. Ряд лекций посвящен смешанным краевым задачам для параболических (случай уравнения теплопроводности) и гиперболических (случай волнового уравнения), в частности построению решений методом Фурье, а также обоснованию метода Фурье. Отдельная тема курса это гармонические функции и их свойства. А также основные краевые задачи (задача Дирихле и задача Неймана) для уравнений эллиптического типа (уравнений Лапласа и Пуассона)

Главной целью курса следует считать введение в классические подходы к классическим задачам математической физики, которые воспринимать скорее как наиболее простые и понятные образцы и примеры, на которые можно и нужно ориентироваться исследователю, ставящему и решающему актуальные задачи современной математической физики.

Для успешного усвоения курса слушателю желательно знать и владеть основами Математического Анализа, Дифференциальных Уравнений, а также Линейной Алгебры.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Конечной целью дисциплины «Уравнения математической физики» является формирование базовых компетенций вместе с лежащими в их основе знаниями, умениями и навыками использования стандартного математического аппарата, предназначенного для описания физических процессов, зависящих от двух и большего числа переменных. Как правило, такие процессы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. И хотя в наиболее интересных случаях уравнения оказываются нелинейными, простейший путь к построению теории даже нелинейных уравнений в частных производных второго и более высокого порядка начинается с линеаризации таких уравнений. В связи с тем, что введение в теорию квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка вошло в предшествующий курс обыкновенных дифференциальных уравнений, общая цель вводного курса в базовый математический аппарат описания многомерных физических процессов традиционно сводится к изучению методов решения корректно поставленных задач математической физики, сформулированных как задачи с начальными, краевыми и начально-краевыми условиями для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. При этом уравнения порядка выше второго, как правило, остаются за пределами стандартного вводного курса, невзирая на их важность, например, для механики сплошных сред и теории упругости. Главной целью данного вводного курса является освоение основных классических подходов к решению корректно поставленных задач, используя при этом как аналитические методы решения, дополненные элементами современных методов, так и качественные методы анализа искомых решений, применимые даже тогда, когда аналитический вид самих решений не известен. Решаемые в курсе классическими методами конкретные классические задачи не следует воспринимать чисто утилитарно, как решения неких задач, которые к чему-то можно, а к чему-то и нельзя приложить непосредственно. Основополагающей мотивацией данного курса следует считать введение в классические подходы к классическим задачам математической физики, которые следует воспринимать скорее как наиболее простые и понятные образцы и примеры, на которые можно и нужно ориентироваться исследователю, ставящему и решающему актуальные задачи современной математической физики.

### Задачи дисциплины

Освоить все этапы решения задачи математической физики по полной схеме:

«классификация задачи – анализ корректности постановки – выбор подходящего аналитического метода решения – решение задачи – анализ найденного решения». Освоить также все этапы анализа задачи математической физики общего вида по неполной схеме:

«классификация задачи – анализ корректности постановки – качественный анализ свойств искомого решения» в случае, когда задача не поддается аналитическому решению в явном виде, что для уравнений в частных производных является скорее общим правилом, чем исключением. На практике такой анализ позволяет быстрее определить правильное направление поиска каких-либо иных средств решения задачи, помимо аналитических, таких, например, как приближенные и численные методы, хотя и основанных на курсе УМФ, но выходящих за его традиционные рамки.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные типы дифференциальных уравнений в частных производных;
- определение характеристической поверхности;
- основные краевые задачи для уравнений гиперболического типа, параболического типа, эллиптического типа;
- формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения;
- принципы максимума для параболических и эллиптических уравнений;
- метод Фурье построения классических решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения;
- основные свойства гармонических функций;
- формулу Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре;
- формулу Пуассона решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в шаре.

уметь:

- определять тип дифференциальных уравнений в частных производных; приводить уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами к каноническому виду;
- решать методом характеристик задачи Коши и Гурса для гиперболического уравнения на плоскости;
- решать смешанные задачи на полуоси для одномерного волнового уравнения;
- решать задачу Коши для волнового уравнения;
- решать задачу Коши для уравнения теплопроводности;
- применять метод Фурье при решении смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности;
- решать краевые задачи для уравнения Пуассона в круговых и шаровых областях.

владеть:

- методами и подходами теории уравнений в частных производных, ориентированными на решение широкого круга прикладных задач в области механики, физики и экономики и др;
- знаниями, умениями и навыками, приобретенными в ходе изучения курса уравнений математической физики, позволяющими корректно формулировать и решать краевые и начально-краевые задачи, возникающие при математическом моделировании реальных процессов в рамках различных областей науки и техники.

## 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Гармонические функции и их свойства.	6	4		12
2	Задача Коши для волнового уравнения.	7	11		23
3	Задача Коши для уравнения теплопроводности.	6	6		12
4	Классификация уравнений. Характеристики.	6	2		8
5	Метод Фурье решения смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.	6	11		26
6	Области внешнего типа. Краевые задачи для уравнения Лапласа в областях внешнего типа.	7	5		12
7	Решение задачи Дирихле и задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге и в шаре.	7	6		12
Итого часов		45	45		105
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

##### 1. Гармонические функции и их свойства.

Гармонические функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Потенциалы простого и двойного слоев. Объемный (ньютонов) потенциал. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теоремы о среднем. Теорема об устранении особенности. Принцип максимума. Теорема Лиувилля.

##### 2. Задача Коши для волнового уравнения.

Волновое уравнение в случае двух и трех пространственных переменных. Плоские характеристики волнового уравнения, световой конус. Постановка задачи Коши. Задача Коши для волнового уравнения. Необходимые условия для существования решения. Закон сохранения энергии и единственность решения задачи Коши. Существование решения задачи Коши в случаях трех пространственных переменных (формула Кирхгофа). Существование решения задачи Коши в случае двух пространственных переменных (формула Пуассона, метод спуска). Непрерывная зависимость решения от начальных функций.

Распространение волн в случае двух и трех пространственных переменных. О диффузии волн в случае двух пространственных переменных.

##### 3. Задача Коши для уравнения теплопроводности.

Задача Коши для уравнения теплопроводности. Необходимые условия для существования решения. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Единственность решения, ограниченного в каждой характеристической полосе. Класс единственности Тихонова. Решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности-формула Пуассона. Бесконечная дифференцируемость решения. Принцип максимума. Непрерывная зависимость решения от начальной функции. Отсутствие непрерывной зависимости решения задачи Коши для уравнения «обратной теплопроводности» (пример Адамара).

#### 4. Классификация уравнений. Характеристики.

Дифференциальные уравнения в частных производных. Линейные дифференциальные уравнения. Классификация уравнений второго порядка.

Характеристики линейных уравнений второго порядка. Обыкновенное дифференциальное уравнение для характеристик в двумерном случае. Характеристики волнового уравнения.

Волновое уравнение в случае одной пространственной переменной. Постановка задачи Коши (в частности, локализованной задачи), формула Даламбера. Область зависимости решения задачи Коши. Непрерывная зависимость решения от начальных функций. Пример отсутствия непрерывной зависимости в случае уравнения Лапласа (пример Адамара).

#### 5. Метод Фурье решения смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.

Смешанная задача для одномерного уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Необходимые условия разрешимости задачи (условия гладкости правой части уравнения и начальной и граничных функций и условия их согласования). Принцип максимума и теорема единственности. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальной и граничных функций.

Метод Фурье доказательства теоремы о существовании решения.

Смешанная задача для одномерного волнового уравнения на конечном отрезке. Необходимые условия разрешимости задачи (условия гладкости правой части уравнения и начальных и граничных функций и условия их согласования). Теорема единственности и теорема о непрерывной зависимости решения от начальных функций (закон сохранения энергии).

Метод Фурье доказательства теоремы о существовании решения.

#### 6. Области внешнего типа. Краевые задачи для уравнения Лапласа в областях внешнего типа.

Области внешнего типа. Преобразование инверсии и его свойства. Преобразование Кельвина. Регулярность гармонической функции на бесконечности. Принцип максимума для гармонической функции в области внешнего типа.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в области внешнего типа. Необходимые условия разрешимости задачи. Теорема единственности решения. Теорема о непрерывной зависимости решения от граничной функции. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа во внешности шара - формула Пуассона.

#### 7. Решение задачи Дирихле и задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге и в шаре.

Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимые условия ее разрешимости. Единственность решения; непрерывная зависимость решения от граничной функции. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре-формула Пуассона.

Задача Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимые условия разрешимости. Теорема об общем виде решения задачи. Решение задачи Неймана для уравнения Лапласа в шаре.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

Михайлов, В. П.

Лекции по уравнениям математической физики [Текст] : учеб. пособие : рек. Учеб.-метод. советом МФТИ / В. П. Михайлов .— М : Физматлит, 2001 .— 206 с. — (Лекции кафедры высшей математики МФТИ). - Библиогр.: с. 202-203. - Предм. указ.: с. 204-206. - 1000 экз. - ISBN 5-94052-026-X) .

Михайлов, В. П.

Сборник типовых задач по курсу "Уравнения математической физики" [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. П. Михайлов, Т. В. Михайлова, М. И. Шабунин ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : Изд-во МФТИ, 2007 .— 128 с. - 800 экз. - ISBN 5-7417-0206-6.

Сборник задач по уравнениям математической физики [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Владимиров [и др.] .— 5-е изд., перераб. и доп. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2016 .— 520 с. - Библиогр.: с. 516-517. - 1500 экз. - ISBN 978-5-9221-1692-3 (в пер.) .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

Владимиров, В. С.

Уравнения математической физики [Текст] : учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов .— 2-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2000, 2004, 2008 .— 400 с. - Библиогр.: с. 399. - 3000 экз. - ISBN 5-9221-0310-5 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Уроев, В. М.

Уравнения математической физики [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. М. Уроев .— М. : Яуза, 1998 .— 373 с. - 5000 экз. - ISBN 5-88923-026-3

### Дополнительная литература

Тихонов, А. Н.

Уравнения математической физики [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова .— 7-е изд. — М. : Изд-во МГУ : Наука, 2004 .— 798 с. — (Классический университетский учебник : посвящ. 250-летию Московского университета). - Библиогр.: с. 791. - Предм. указ.: с. 792-798. - 5000 экз. - ISBN 5-211-04843-1 (в пер.)

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://math.stackexchange.com> – международный образовательный математический сайт, на котором представлены почти все разделы математики, включая pde (=partial differential equations); лучшее из имеющихся в интернете средств бесплатного математического самообразования; успешно функционирует благодаря участию студентов и преподавателей университетов всего мира: студенты ищут и находят помощь в решении задач, а преподаватели получают доступ к огромной базе задач к любому стандартному математическому курсу в рамках университетской программы от бакалавриата до аспирантуры, причем свежие задачи поступают на сайт круглосуточно непрерывным потоком; методические рекомендации по эффективному использованию сайта см. ниже в разделе 10;
2. <http://eqworld.ipmnet.ru/> – источник информации по линейным и нелинейным дифференциальным и функциональным уравнениям с онлайн доступом к учебникам и справочникам по математике, механике и физике и со ссылками на другие подобные источники интернета;
3. <http://www.wolframalpha.com/> – новый способ добывать знания и получать ответы на вопросы: не поиском в интернете, а получив доступ к онлайн использованию обширных баз данных, алгоритмов и методов;
4. <http://www.encyclopediaofmath.org> – Математическая энциклопедия, изданная в Москве на русском в 5 томах издательством «Советская Энциклопедия» в 1977 году, и затем переизданная на английском издательством Kluwer Academic Publishers в 2002 году с комментариями экспертов.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Не предусмотрено.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса указано время на самостоятельную работу, минимально необходимое для полноценной работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- подготовку к практическим занятиям.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо адекватно аргументировать, ссылаясь на уже усвоенные теоретические сведения. Облегчить решение задачи поможет хорошо выполненный рисунок, отражающий условия задачи.

При подготовке к практическим занятиям необходимо повторять ранее изученные основные определения, формулировки теорем. Обычно придерживаются следующей схемы: изучение материала лекции по конспекту в тот же день, когда была прослушана лекция (10-15 минут); повторение материала накануне следующей лекции (10-15 минут), проработка учебного материала по конспектам лекций, учебной и научной литературе, подготовка ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения (1 час неделю), подготовка к практическому занятию, решение задач (1 час). Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Доп. литература:

1. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1973.
2. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005.
3. Зубов В.И. Функции Бесселя: учебно-методическое пособие. М.: МФТИ, 2007
4. Пальцев Б.В. Сферические функции: учебно-методическое пособие. М.: МФТИ, 2004.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Системная и синтетическая биология  
Физтех-школа Биологической и Медицинской Физики  
кафедра высшей математики  
**курс:** 3  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

**Разработчики:**

В.И. Зубов, д-р физ.-мат. наук, профессор  
Т.В. Михайлова, канд. физ.-мат. наук, доцент



## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Уравнения математической физики» обучающийся должен:

### знать:

- основные типы дифференциальных уравнений в частных производных;
- определение характеристической поверхности;
- основные краевые задачи для уравнений гиперболического типа, параболического типа, эллиптического типа;
- формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения;
- принципы максимума для параболических и эллиптических уравнений;
- метод Фурье построения классических решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения;
- основные свойства гармонических функций;
- формулу Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре;
- формулу Пуассона решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в шаре.

### уметь:

- определять тип дифференциальных уравнений в частных производных; приводить уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами к каноническому виду;
- решать методом характеристик задачи Коши и Гурса для гиперболического уравнения на плоскости;
- решать смешанные задачи на полуоси для одномерного волнового уравнения;
- решать задачу Коши для волнового уравнения;
- решать задачу Коши для уравнения теплопроводности;
- применять метод Фурье при решении смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности;
- решать краевые задачи для уравнения Пуассона в круговых и шаровых областях.

### владеть:

- методами и подходами теории уравнений в частных производных, ориентированными на решение широкого круга прикладных задач в области механики, физики и экономики и др;
- знаниями, умениями и навыками, приобретенными в ходе изучения курса уравнений математической физики, позволяющими корректно формулировать и решать краевые и начально-краевые задачи, возникающие при математическом моделировании реальных процессов в рамках различных областей науки и техники.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течение учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Классификация.
2. Приведение к каноническому виду.
3. Уравнения Лапласа, Пуассона, волновое уравнение, теплопроводности и другие.
4. Общие решения. Преобразования, сохраняющие вид уравнения. Принцип суперпозиции решений.
5. Тиражирование решений. Автомодельные решения. Примеры.
6. Линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами.
7. Замена независимых переменных и приведение к каноническому виду уравнения с двумя независимыми переменными.
8. Классификация в точке и в области. Характеристики.
9. Постановка задач математической физики. Типичные задачи. Краевые и начальные условия.
10. Задачи: Коши; краевые; смешанные.
11. Многомерные операторы сдвига. Свойства. Применения.
12. Задача Коши и представление ее решения для линейного уравнения с частными производными первого порядка.
13. Решение задачи Коши (волновое уравнение; уравнение теплопроводности) для квазимоночленных входных данных.
14. Задача Коши для уравнения колебаний струны ( $n=1$ ). Формула Даламбера.
15. Задачи для полуограниченной прямой.
16. Задача Коши для волнового уравнения ( $n=3$ ). Формула Кирхгофа.
17. Задача Коши для уравнения колебаний мембраны ( $n=2$ ). Формула Пуассона (метод спуска). Единственность решения задачи Коши.
18. Линейное гиперболическое уравнение с частными производными высокого порядка и с двумя независимыми переменными. Задача Коши и представление ее решения. Характеристики.
19. Линейная гиперболическая система уравнений с частными производными первого порядка и с двумя независимыми переменными. Задача Коши и представление ее решения. Характеристики.
20. Смешанная задача для уравнения колебаний струны на отрезке. Единственность решения.
21. Принцип суперпозиции решений и метод разделения переменных.
22. Задача с данными на характеристике (задача Гурса).
23. Задача Штурма--Лиувилля на отрезке. Функция Грина оператора Штурма--Лиувилля.
24. Уравнения Лапласа, Пуассона и Гельмгольца. Гармонические функции и их свойства.
25. Принцип максимума. Преобразование Кельвина.
26. Лапласиан в полярных, цилиндрических и сферических координатах.
27. Фундаментальные решения ( $n=1, n=2, n=3, n \geq 4$ ) и дельта-функция.
28. Основные краевые задачи (внутренние; внешние): задача Дирихле; задача Неймана.
29. Теоремы единственности. Формулы Грина. Функция Грина задачи Дирихле.
30. Представление решения задачи Дирихле (в круге и шаре, в полуплоскости и полупространстве) через краевые значения.
31. Конформные отображения и их использование для решения задачи Дирихле и для построения функции Грина.
32. Метод разделения переменных и решение краевых задач в  $R^2$ .

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Время проведения письменного экзамена составляет четыре астрономических часа. Во время проведения письменного экзамена обучающиеся могут пользоваться только ручкой, карандашом и бумагой.

**Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов**

Дисциплина: Уравнения математической физики, 3 курс, 6 семестр, экзамен.

Кафедра: высшей математики

№	Виды занятий	Сумма баллов
1.	Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания	0 – 9
2.	Контрольная работа № 2 по сдаче 2 задания	0 – 9
3.	Задание № 1	0 – 3
4.	Задание № 2	0 – 3
5.	Проверка теоретических знаний	0 – 3
6.	Работа на семинарах	0 – 3
7.	Письменная работа	0 – 30
8.	Итоговый контроль. Экзамен (устный ответ)	0 – 60
	<b>ИТОГО</b>	<b>0 – 120</b>

Сумма баллов  $\Sigma$  промежуточной аттестации вычисляется по формуле :

$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \leq 120$ , где  $\Sigma_1$ - за работу в семестре, ( $0 \leq \Sigma_1 \leq 30$ );  $\Sigma_2$ - за письменную работу;  $\Sigma_2 = 3 \cdot K$ ,  $1 \leq K \leq 10$ , K-оценка за письменную работу. Если письменная работа написана на 0 баллов, то  $\Sigma_2 = 0$ .  $\Sigma_3$ - за устный экзамен;  $\Sigma_3 = 6 \cdot n$ ,  $3 \leq n \leq 10$ , где n-оценка за устный экзамен. Если n=1 или 2, то итоговая оценка совпадает с n, при этом  $\Sigma_3$  не вычисляется.

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системы.

Баллы БРС	Оценки	
112– 120	10	отлично
103 – 111	9	
94 – 102	8	
85 – 93	7	хорошо
76 – 84	6	
67 – 75	5	
54 – 66	4	удовлетворительно
41 – 53	3	
28 – 40	2	
0 – 27	1	неудовлетворительно

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ Г.Е. Иванов

### 3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Уравнения математической физики» осуществляется в форме экзамена (6 семестр). Экзамен проводится в письменной и устной форме.

#### Примеры контрольных вопросов:

1. Дать определение задачи Коши и характеристической поверхности. В чем суть метода характеристик?
2. Написать формулу Даламбера. Решение какой задачи оно дает? Как формулируется смешанная задача для полубесконечной струны с закреплённым концом? Со свободным концом?
3. В чем состоит принцип Гюйгенса?
4. Сформулировать задачу Коши для уравнения теплопроводности. Привести формулу, дающую ее решение. Как формулируется принцип максимума для параболического уравнения?
5. Сформулировать краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения эллиптического типа и дать определение их решений.
6. Какие методы Вам известны для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге? Что такое интеграл Пуассона?
7. Как формулируется смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке? В чем суть метода Фурье?
8. Сформулировать смешанную задачу для уравнения колебаний струны на отрезке.
9. Дать определение гармонической функции. Какие свойства этих функций? В чем состоит принцип максимума и минимума для гармонических функций? Как формулируется задача Дирихле для уравнения Пуассона?
10. Дать определение области внешнего типа. Регулярность гармонической функции на бесконечности. Что такое преобразование Кельвина. Приведите корректную постановку внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле во внешности шара.

#### Примеры контрольных заданий:

### ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина:

Уравнения математической физики

---

Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено

1 однозначно:

$$x^4 u_{xx} - y^4 u_{yy} + 2x^3 u_x - 2y^3 u_y = 0, \quad (x > 0, y > 0),$$

$$u|_{xy=1} = 1, \quad (1 < x < 2), \quad u|_{y=x} = x^2, \quad (0.25 < x < 1).$$

---

Найти решение смешанной задачи:  $16u_{tt} = u_{xx} + 72e^{2x-t}, \quad (x > 0, t > 0),$

2

$$u|_{t=0} = 12x, \quad u|_{t=0} = -3, \quad (x \geq 0), \quad (u - u_x)|_{x=0} = 3e^{-t} - 15, \quad (t \geq 0).$$

---

Решить смешанную задачу:  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (0 < x < 3\pi, t > 0),$

3

$$u|_{t=0} = \cos(x/2), \quad u|_{t=0} = x - 3\pi, \quad (0 \leq x \leq 3\pi),$$

$$u_x|_{x=0} = \sin t, \quad u|_{x=3\pi} = 0, \quad (t \geq 0).$$

---

---

Решить задачу Коши:  $u_t = \Delta u - 12sh2t \cdot shy$ ,  $((x, y, z) \in R^3, t > 0)$ ,

4  $u|_{t=0} = x^3 shy + (2x + y) \cos(1 + y + 2x) - yze^{-(z/2)^2}$ ,  $((x, y, z) \in R^3)$ .

---

Решить задачу:

5  $\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi$ ,  $(r < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ ,

$$(3u + u_r)|_{r=1} = 11 \sin 6\varphi - 5 \cos 7\varphi + 3.$$

---

Примеры задач, используемых при сдаче заданий:

1. Решить задачу Коши:

$$9u_t = \Delta u, \quad (x, y) \in R^2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 3 \cos 2x + e^{-9x^2} \sin y, \quad (x, y) \in R^2.$$

2. Найти  $u(0, 0, x_3)$  для  $x_3 > 0$ , где  $u(x_1, x_2, x_3)$  - решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad x_3 > 0,$$

$$u|_{x_3=0} = \begin{cases} 1, & x_1^2 + x_2^2 < R^2, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 \geq R^2. \end{cases}$$

3. Найти функцию  $u(x)$ , гармоническую в шаре  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1$  и такую, что

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial r}\right)\bigg|_{r=1} = \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2}} \cdot (\sin 2\varphi + 3\sqrt{2}).$$

4. Решить задачу:

$$\Delta u = 96x^2, \quad (u - u_r)|_{r=1} = 12 \sin 2\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.

---

Решить смешанную задачу:  $u_{tt} = 4u_{xx}$ ,  $(0 < x < 3\pi, t > 0)$ ,

$$u|_{t=0} = \cos(x/2), \quad u_t|_{t=0} = x - 3\pi, \quad (0 \leq x \leq 3\pi),$$

$$u|_{x=0} = \sin t, \quad u|_{x=3\pi} = 0, \quad (t \geq 0).$$

---

#### 4. Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное

обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Время проведения письменного экзамена составляет три астрономических часа. Во время проведения письменного экзамена обучающиеся могут пользоваться только ручкой, карандашом и бумагой.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.